**Theoretische Physik II**
**für Lehramtsstudenten**
**WS 2005/06**

Vorlesungen: Christian Sämann & Kirsten Vogeler
Übungen: Michael Flohr
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

## Präsenzübung
am 17.01.2006

In dieser Präsenzübung geht es darum, besser zu verstehen, wie quantenmechanische Systeme behandelt werden können, bei denen mehrere Quantenzahlen auftreten, oder die aus mehreren, identifizierbaren Teilchen zusammengesetzt sind. Zum Beispiel können wir uns leicht Systeme vorstellen, die aus zwei Teilchen bestehen, deren Eigenschaften *getrennt* gemessen werden können. Dann ist der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des Gesamtsystems der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Seine Zustände sind endliche Linearkombinationen von Paaren $|u\rangle \otimes |v\rangle$ mit $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|v\rangle \in \mathcal{H}_2$. Es gilt weiter für $|u'\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|v'\rangle \in \mathcal{H}_2$ und $c \in \mathbb{C}$, dass

$$|cu + u'\rangle \otimes |v\rangle = c|u\rangle \otimes |v\rangle + |u'\rangle \otimes |v\rangle\,, \qquad |u\rangle \otimes |cv + v'\rangle = c|u\rangle \otimes |v\rangle + |u\rangle \otimes |v'\rangle\,.$$

Außerdem faktorisiert das Skalarprodukt, also

$$\langle u' \otimes v' | u \otimes v\rangle \equiv (\langle u'| \otimes \langle v'|)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = \langle u'|u\rangle\langle v'|v\rangle\,.$$

10. *Produktraum:* Wir wollen einige Eigenschaften von Zuständen aus Produkträumen verstehen. Seien $|\phi_i\rangle$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_1$ und $|\chi_j\rangle$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_2$.

    (a) Zeige, dass dann $|\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ ist. Damit hat ein beliebiger Zustand eine Entwicklung $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \psi_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$ mit den Komponenten-Koeffizienten $\psi_{ij} = (\langle\phi_i| \otimes \langle\chi_j|)|\Psi\rangle = \langle\phi_i \otimes \chi_j|\Psi\rangle$.

    (b) Zeige, dass die Komponenten $\psi_{ij}$ zwei Abbildungen $N : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ und $N^\dagger : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ definieren, indem Du die Wirkung von $\sum_{i,j} |\phi_i\rangle\psi_{ij}(\langle\chi_j|\ \cdot)^*$ auf einen Zustand $|v\rangle = \sum_j v_j|\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_2$ und analog die Wirkung von $\sum_{i,j}(\cdot\ |\chi_i)^*\rangle\psi^*_{ij}\langle\phi_j|$ auf einen Zustand $|u\rangle = \sum_i u_i|\phi_i\rangle \in \mathcal{H}_1$ betrachtest. Hierbei soll gelten: $(\langle\chi_j|\ \cdot)^*\ |u\rangle = \langle\chi_j|u\rangle^*$, mit $*$ der komplexen Konjugation. Hängen diese Abbildungen von den gewählten Basen ab?

    (c) Zeige, dass $N^\dagger N : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ hermitesch ist. Es seien $|V_n\rangle$ die Eigenvektoren von $N^\dagger N$ mit Eigenwerten $\lambda_n^2$, also $N^\dagger N|V_n\rangle = \lambda_n^2|V_n\rangle$. Man kann annehmen, dass die $|V_n\rangle$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$ bilden. Zeige, dass die Eigenwerte nicht negativ sind. Sei nun $\lambda_n^2 > 0$, dann werden mit $N|V_n\rangle = |\lambda_n|\ |U_n\rangle$ normierte Vektoren $|U_n\rangle \in \mathcal{H}_1$ definiert. Zeige, dass auch die $|U_n\rangle$ orthonormal sind. Sollten sie nicht ganz $\mathcal{H}_1$ aufspannen, so denken wir uns diese ergänzt zu einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$.

    (d) Jeder normierte Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ definiert also eine Orthonormalbasis $|U_m\rangle \in \mathcal{H}_1$ und eine Orthonormalbasis $|V_n\rangle \in \mathcal{H}_2$. Wie lauten nun die Komponenten $\psi_{mn}$ mit diesen neuen Basen? Schreibe $|\Psi\rangle$ explizit in dieser Basis aus. Diese Darstellung eines normierten Vektors in einem Produktraum, $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ heißt *Schmidt-Zerlegung*.

    (e) Nimm an, dass sich die Komponenten $\psi_{ij}$ als Produkte $a_i b_j$ schreiben lassen. Welchen Rang hat dann $(\psi)_{ij}$, aufgefasst als Matrix? Interpretiere dabei den Index $i$ als Zeilen-, $j$ als Spalteneintrag. Verwende die Definition $\mathrm{rank}(\psi) := \dim(\mathrm{Image}(\psi))$ oder äquivalent den Zeilenrang von $\psi$. Begründe, dass $(\psi)_{ij}$ genau dann Rang eins hat, wenn $|\Psi\rangle = (\sum_i a_i|\phi_i\rangle) \otimes (\sum_j b_j|\chi_j\rangle)$ ein Produktzustand ist.

    (f) Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass die in (c) eingeführten $|V_n\rangle$ und $|U_n\rangle$ eine vollständige Basis von $\mathcal{H}_2$ bzw. $\mathcal{H}_1$ bilden. Insbesondere heisst dies, dass vorausgesetzt wird, dass $\lambda_n^2 > 0 \;\forall\, n$. Zustände, deren Schmidt-Zerlegung aus mehreren Termen bestehen, heißen *verschränkte* Zustände. Zeige, dass die Funktion

$$S(|\Psi\rangle) = -\sum_n \lambda_n^2 \ln \lambda_\mathrm{n}^2$$

nur verschwindet, wenn $|\Psi\rangle$ ein Produktzustand ist, und sonst positiv ist. Hinweis: Betrachte dazu die explizite Form von $|\Psi\rangle$ aus (d), und nutze aus, dass $|\Psi\rangle$ normiert ist.

(g) Es sei $A$ ein Operator, der einen Meßapparat beschreibt, der das erste Teilsystem vermißt, der also $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_1$ abbildet. Analog sei $B$ ein Operator für das zweite Teilsystem. Wie ist die Wirkung $A \otimes B$ auf $|u\rangle \otimes |v\rangle$ erklärt? Mit Linearität folgt damit auch die Wirkung von $A \otimes B$ auf allgemeine Zustände $|\Psi\rangle$. Wie würde ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter Operator zu schreiben sein, der nur das erste Teilsystem vermißt?

11. *Unabhängig zusammengesetzte Gemische:* Motivation: Betrachte zunächst einen reinen Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$. Seien $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ mit Eigenzuständen $|\Omega_i\rangle$ und $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ mit Eigenzuständen $|\Gamma_i\rangle$ gegeben. Wie ist $w((ij), A \otimes B, \Psi)$ definiert? Was muss für $|\Psi\rangle$ gelten damit $w$ faktorisiert, d.h.

$$w((i,j), A \otimes B, \Psi) = w_1(i, A, \Psi_1) w_2(j, B, \Psi_2)$$

für geeignete Zustände $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$?

Ein Gemisch $\rho$ eines zusammengesetzten Systems ist unabhängig zusammengesetzt, wenn die Wahrscheinlichkeiten für alle Paare von Meßergebnissen von Messungen $A \otimes \mathbb{1}$ am ersten Teilsystem und Messungen $\mathbb{1} \otimes B$ am zweiten Teilsystem faktorisieren,

$$w((i,j), A \otimes B, \rho) = w_1(i, A, \rho_1) w_2(j, B, \rho_2)\,.$$

Überlege, dass dies dann Sinn macht, wenn dabei

$$w_1(i, A, \rho_1) = \sum_j w((i,j), A \otimes B, \rho)\,, \qquad w_2(j, B, \rho_2) = \sum_i w((i,j), A \otimes B, \rho)$$

ist. Was bedeutet das physikalisch? Wenn ein Gemisch nicht unabhängig zusammengesetzt ist, nennen wir die Teilsysteme verschränkt.

Mathematische bedeutet unabhängig zusammengesetzt folgendes: Wahrscheinlichkeiten sind Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix, $\langle \Lambda | \rho \Lambda \rangle$. Sei $|\Lambda\rangle$ ein Eigenzustand von $A \otimes B$. Warum ist dies ein Produktzustand? Die Faktorisierungsbedingung bedeutet für Produktzustände $|u \otimes v\rangle$ dann

$$\langle u \otimes v | \rho | u \otimes v \rangle = \sum_{i,i',j,j'} a_i^* b_j^* \rho_{(i,j),(i',j')} a_{i'} b_{j'} = \left( \sum_{i,i'} a_i^* (\rho_1)_{i,i'} a_{i'} \right) \left( \sum_{j,j'} b_j^* (\rho_2)_{j,j'} b_{j'} \right)$$

Beide Seiten sind Bilinearformen in $|u\rangle$ und $|v\rangle$, und sind nur dann für alle $|u\rangle$ und $|v\rangle$ gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Welche Beziehung gilt also für die Dichtematrizen $\rho$, $\rho_1$ und $\rho_2$, wenn $\rho$ zu einem unabhängig zusammengesetzen Gemisch gehört?

Bei verschränkten Systemen kann ein reiner aber verschränkter Zustand gemischt erscheinen, wenn man nur am ersten Teilsystem mißt. Betrachte $w_1(i, A, |\Psi\rangle) = \sum_j |\langle \Lambda_i \otimes \chi_j | \Psi \rangle|^2$, wenn $|\Lambda_i\rangle$ die Eigenbasis von $A$ ist. Drücke dies als $\langle \Lambda_i | \rho_1 \Lambda_i \rangle$ aus und gib $\rho_1$ in der Basis der Schmidt-Zerlegung an. Finde damit ein Kriterium, wann $\rho_1$ zu einem reinen Zustand gehört. Welche Eigenschaft muss demnach $|\Psi\rangle$ haben?